



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a 12-a

Barem de evaluare și notare.

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

Problema 1. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx, n \in \mathbb{N}$.

(a) Determinați numărul real I_2 .

(b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este monoton și determinați limita sa.

Soluție:

a) $I_2 = \ln 2 - \frac{17}{2}$	4p
b) $I_n \geq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$, șirul este descrescător	2p
$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$	1p

Problema 2. Se consideră funcțiile $f, g, h: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x, g(x) = \int_0^{f(x)} \sin t \cos t dt$

$$\text{și } h(x) = \int_0^{\arctg x} t g t dt.$$




(a) Determinați $g(1)$.

(b) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)}$.

(Supliment GM 12/2023)

Soluție:

a) $g(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2}$	4p
b) Folosind regula lui L'Hospital se obține imediat limita cerută $L = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$	3p

 MINISTERUL EDUCAȚIEI Societatea de Științe Matematice din România, Filiala Caraș - Severin	 
---	--

Problema 3. Se consideră un grup finit multiplicativ G și $a \in G$ un element fixat. Arătați că, dacă există o funcție surjectivă $f : G \rightarrow G$ cu proprietatea că $f(x^3) = f(axa), \forall x \in G$, atunci grupul (G, \cdot) este abelian.

(Supliment GM 11/2023)

Soluție:

G finit și f surjectivă $\Rightarrow f$ - injectivă, deci $x^3 = axa, \forall x \in G$ (*)	2p
Pentru $x = e$ obținem în (*): $a^2 = e$	2p
$(xy)^3 = axya = (axa)(aya) = x^3 y^3$, deci $xyxyxy = x^3 y^3, \forall x, y \in G$ sau $xyyx = x^2 y^2$; pentru $y = a$: $axax = x^2 \Rightarrow x^4 = x^2$, deci $x^2 = e, \forall x \in G$	2p
Concluzia	1p

Problema 4. Pentru orice două grupuri G și H , având elementele neutre e_1 , respectiv e_2 , dacă $f : G \rightarrow H$ este un morfism de grupuri, se consideră mulțimile $\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_2\}$ și $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in G\}$.

Fie grupurile $G = (\mathbb{R}, +)$ și $H = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, precum și funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*, g(x) = \cos 2\pi x + i \cdot \sin 2\pi x$.

Demonstrați că:

- (a) g este un morfism de grupuri;
(b) $\text{Ker}(g) = \mathbb{Z}$ și $\text{Im } g = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(Supliment GM 10/2023)

Soluție:

a) Verificare imediată	3p
b) $f(x) = 1$ conduce la $\cos 2\pi x = 1, \sin 2\pi x = 0 \Leftrightarrow x = k \in \mathbb{Z}$, deci $\text{Ker}(g) = \mathbb{Z}$	2p
Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $f(x) = z$ avem $ z = \sqrt{\cos^2 2\pi x + \sin^2 2\pi x} = 1$	1p
Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ cu $ z = 1, z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, există $t \in [0, 2\pi]$ așa încât $a = \cos t, b = \sin t$ și deci există $x = \frac{t}{2\pi}$ pentru care $f(x) = z$	1p